Geometría Analítica

Guía para el segundo examen parcial

Conceptos y habilidades que el alumno debe entender y dominar.

1. La ecuación de la circunferencia y los elementos geométricos que la determinan.
2. La ecuación de la parabola con directriz paralela a los ejes coordenados y los elementos geométricos que la determinan.
3. La ecuación de la elipse con ejes paralelos a los elementos geométricos que la determinan.
4. La ecuación de la hipérbola con ejes paralelos a los elementos geométricos que la determinan.
5. Identificar y la gráficar ecuación general de segundo grado sin término xy.
6. La rotación de los ejes coordenados para eliminar el término xy de una ecuación general de segundo grado.
7. Identificar y la gráficar ecuación general de segundo grado.
8. El indicador $B^2 - 4AC$.

Ejercicios resueltos.

1. Describir geométricamente la ecuación $2x^2 + 3y^2 - 8x + 6y = 7$.
   Solución. Completando cuadrados la ecuación se puede escribir de la forma $2(x-2)^2 + 3(y+1)^2 = 18$. Dividiendo entre 18, esta ecuación se escribe como

   $$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{6} = 1$$

   de donde la ecuación es una elipse con centro en $(2, -1)$ cuyo eje mayor es horizontal y mide 6, además el eje menor es vertical y mide $2\sqrt{6}$. Más aún la distancia del centro al foco está dada por $\sqrt{9-6} = \sqrt{3}$, por lo que sus focos están en los puntos $(2-\sqrt{3}, -1)$ y $(2+\sqrt{3}, -1)$.

2. Describir geométricamente la ecuación $xy - 2y - 4x = 0$.
   Solución. Lo primero que observamos es que $B^2 - 4AC = 1$, por lo que la ecuación describe una hipérbola. Además de esto como $A = C$ debemos de

rotar 45° para eliminar el término xy. Entonces el cambio de coordenadas está dado por

$$x = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}}$$

$$y = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}}$$

Después de reducir términos en las coordenadas $x'y'$ la ecuación se escribe como

$$\frac{(x')^2}{2} - \frac{(y')^2}{2} - 3\sqrt{2}x' - \sqrt{2}y' = 0$$

Después de completar cuadrados y dividir entre 8 esta ecuación se escribe como

$$\frac{(x' - 3\sqrt{2})^2}{16} - \frac{(y' - \sqrt{2})^2}{16} = 1$$

De donde el centro en las coordenadas $x'y'$ está en $(3\sqrt{2}, \sqrt{2})$, además $b = a = 4$ de donde la distancia al foco es $4\sqrt{2}$. De aqui deducimos que en coordenadas $x'y'$ los focos son $(7\sqrt{2}, \sqrt{2})$ y $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ y los vértices están en $(3\sqrt{2}+4, \sqrt{2})$ y $(3\sqrt{2}-4, \sqrt{2})$, así en regresando a coordenadas xy el centro es $(2, 4)$, los focos son $(-2, 0)$ y $(6, 8)$ y los vértices están en $(2-2\sqrt(2), 4-2\sqrt{2})$ y $(2+2\sqrt(2), 4+2\sqrt{2})$. Además de esto las ecuaciones de las asintontas son $y' - \sqrt{2} = \pm(x' - 3\sqrt{2})$ que con la transformación inversa

$$x' = \frac{x + y}{\sqrt{2}}$$

$$y' = \frac{-x + y}{\sqrt{2}}$$

se traducen a $x = 2$ y $y = 4$.

3. Describir geométricamente la ecuación $7x^2 - 6\sqrt{3}xy + 13y^2 - 16 = 0$.
   Solución. Observemos que $B^2 - 4AC = -256 < 0$ por lo que la ecuación describe una elipse. Necesitamos hacer una rotación de ángulo θ donde $\tan(2\theta) = \frac{B}{A-C} = \sqrt{3}$. Así $\sin(2\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $cos(2\theta) = 1/2$. Es decir $2\theta = 60°$, de donde $\theta = 30°$. Entonces $\sin(\theta) = 1/2$ y $cos(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, por lo que el cambio de coordenadas es

$$x = \frac{\sqrt{2}x' - y'}{2}$$

$$y = \frac{x' + \sqrt{2}y'}{2}$$

Sustituyendo los valores de x y y en las ecuación original y simplificando, la ecuación se reduce a

$$\frac{(x')^2}{4} + \frac{(y')^2}{1} = 1$$

En términos de las coordenadas $x'y'$ el centro está en el origen, el eje mayor mide 4, el menor mide 2 y los focos están en los puntos $(-\sqrt{3}, 0)$ y $(\sqrt{3}, 0)$. En las coordenadas originales, el centro es el origen, los ejes miden 4 y 2 y los focos están en los puntos $(-\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$, $(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

Ejercicios propuestos.

Para cada una de las siguientes ecuaciones identificar la cónica correspondiente así como sus elementos geométricos, hacer un dibujo detallado.

1. $x^2 + 4x + 16y^2 + 8y = 0$
2. $x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 2y - 1 = 0$
3. $8x^2 - 24xy + 15y^2 + 4y - 4 = 0$
4. $12x^2 + 12xy + 7y^2 + 4x - 6y - 1 = 0$
5. $2xy = 1$
6. $x^2 - 8x + 8y + 8 = 0$
7. $8x^2 - 4xy + 5y^2 = 36$
8. $4x^2 - 4xy + y^2 - 10y - 19 = 0$